

Paramètres de Similitude

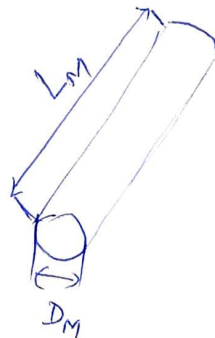
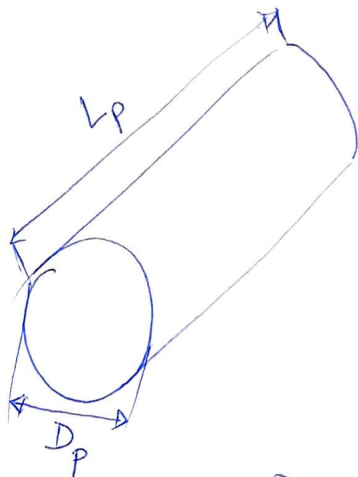
Introduction: Dans beaucoup de cas, l'expérimentation directe sur prototype d'une installation dont on souhaite prédéterminer le comportement est délicate voir impossible. On est donc conduit à tester des modèles à échelle réduite, appelé "maquette". Ce dernier va nous permettre une expérimentation facile, un gain de temps et une réduction des dépenses d'essais et de construction, voir même la possibilité d'une amélioration.

Contrainte: pour que les résultats de mesures sur maquette puissent ^{être} vérifiés sur le prototype, certaines conditions devront être respectées. Ces conditions sont appelées:

Conditions ou critères de similitude. Ces conditions sont au nombre de 4:

- 1) similitude géométrique, 2) similitude cinématique, 3) similitude dynamique, 4) similitude thermique

1) similitude géométrique (similitude de formes)
Soit les deux schémas ci-dessous (prototype "P" et Maquette "M")



$$\text{on a } \frac{D_M}{D_P} = \frac{L_M}{L_P} = C_G \quad \text{Constante de proportionnalité géométrique}$$

C-à-d que la similitude géométrique exige que l'échelle linéaire de longueur C_G soit la même comme le montre les figures "1" et "2"

2) similitude cinématique: Les 2 écoulements (Prototype et Maquette) doivent avoir le même motif ~~de courant~~ de lignes de courant et le même régime d'écoulement. Un rapport d'échelle maquette / Prototype est vérifié C-à-d que les vitesses aux points homologues sont proportionnelles, par facteur d'échelle constant, K_C comme le montre la figure 3.

Similitude géométrique

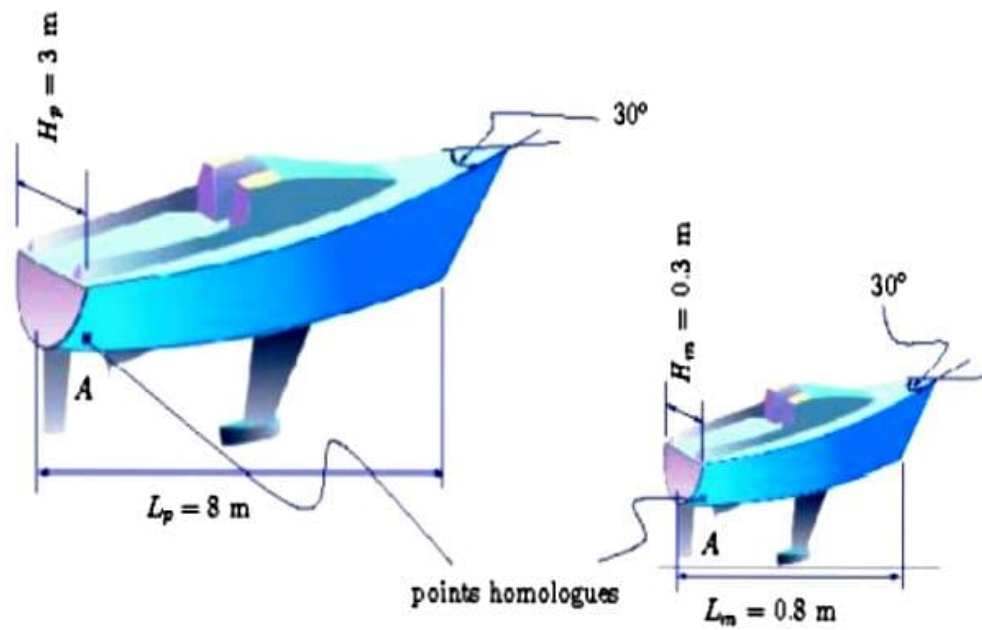


Figure 1: $(H_m/H_p) = (L_m/L_p) = C_G$

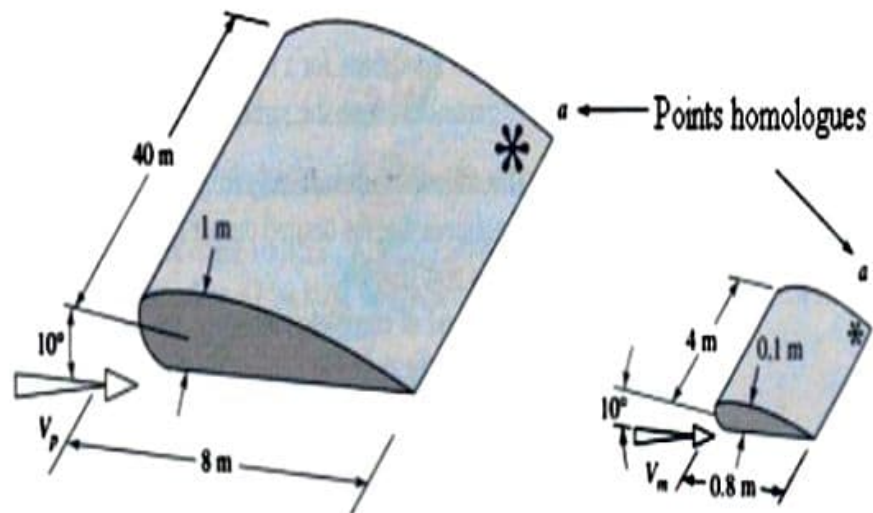


Figure 2: $(4/40) = (0.8/8) = C_G$

Similitude dynamique: Elle est vérifiée si les rapports de forces aux points semblables sur le ~~prototype~~ et sur la maquette est identique à un facteur d'échelle constant K_d .

Cette similitude implique pour la pression

$$\frac{P_p}{P_n} = \frac{\rho_p U_p^2}{\rho_n U_n^2} = k_m \cdot k_g^3 \cdot k_c^2 = \text{cte} \quad k_m = \frac{\text{masse de Prototype}}{\text{masse de maquette}}$$

k_g : cte de proportionnalité géométrique

k_c : " " " " cinématique

Pour la force:
$$\frac{F_p}{F_n} = \frac{\rho_p U_p^2 \cdot D_p^2}{\rho_n U_n^2 \cdot D_n^2} = k_d = \text{cte}$$

k_d : rapport de proportionnalité dynamique
nombres sans dimensions ont les mêmes valeurs.

Exemple ① Pour estimer la force de frottement, F_f , du prototype, on utilise les données obtenues sur une maquette testée dans une soufflerie. Ces données sont présentées ci-dessous pour une géométrie sphérique:

	Prototype	Maquette
D (m)	0,4	0,15
V (m/s)	2,5	à déterminer
F (N)	à déterminer	25 N
ρ (kg m^{-3})	1000	1,2
ν ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$

On demande de calculer la force de frottement, F_f , exercée par l'écoulement sur le prototype.
Rque: solution après la présentation de la partie relative à "l'analyse dimensionnelle".

h) Similitude thermique: Pour des systèmes géométrique semblables ayant les mêmes nombres de Reynolds, la répartition des températures serait similaire si et seulement si le nombre de Peclet ($Pe = Re \cdot Pr$) est le même. En convection naturelle, la similitude des champs de vitesse et de température exige que les nombres de Grashof Gr et de Prandtl soient égaux en les points correspondants (Prototype - Maquette).

Analyse dimensionnelle

Les équations de la physique dites "dimensionnelles" \rightarrow système d'unité.

L'intérêt de l'analyse dimensionnelle est d'exprimer les lois physiques ~~ou~~ les relations qui en dérivent en fonction de nombres sans dimensions (sans unité).

Elle n'exige que la connaissance de tous les paramètres qui ont une influence sur le problème physique qu'on veut traiter. En d'autres termes, elle n'exige pas la connaissance des équations régissant le problème physique.

On note sept grandeurs de base:

Masse M kg	Intensité du courant électrique I A
Longueur L m	Quantité de matière N mol
Temps T s	Intensité lumineuse J (cd: Candela)
Température θ K	

Ce choix est modifiable, on peut remplacer le courant "I" par la charge "Q" ou la masse "M" par la force "F" ou l'énergie "E" ou la pression "P".

Il existe deux méthodes d'analyse dimensionnelle:

- Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Π
- La méthode de Rayleigh

Dans le cadre de ce cours, nous allons développer le théorème Π , car elle est la plus utilisée.

Énoncé du théorème: Si "n" grandeurs physiques $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont liées par une relation $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$ et font intervenir "m" grandeurs de Base ($1 \leq m \leq 7$), alors il existe une relation entre "p" grandeurs adimensionnelles $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ (où $p = n - m$) construites à partir de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ telle que $g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0$

Remarque: dans le cas particulier où ($p=1$) c-à-d qu'il n'existe qu'un seul groupement adimensionnel π_1 , le résultat se mettra sous une forme simple $\pi_1 = \Pi = \text{const}$.

Applications

- 1 - Détermination de la chute de pression ΔP dans une conduite cylindrique rugueuse (تقريباً), de rugosité ϵ . On donne la vitesse moyenne V , la longueur L

Le diamètre D , la masse volumique ρ et la viscosité ~~cinématique~~ ^{dynamique} μ .

Réponse:

Nous avons 7 grandeurs physiques: $\Delta P, \varepsilon, V, L, D, \rho$ et μ .

Leurs dimensions en utilisant (M, L, T, θ) le système d'unité et comme suit:

grandeurs	ΔP	V	D	L	ρ	μ	ε
Dimension	$ML^{-1}T^{-2}$	LT^{-1}	L	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L

Rq: pour connaître la dimension de ΔP ds le système $(MLT\theta)$ on procède

comme suit: $P = F/S = N/S \Rightarrow [P] = [F/S]$ or $S: L^2, F = m\gamma$

Sachant que $m \rightarrow M$ et que $\gamma: LT^{-2}$ donc $P: \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

Au total, nous avons trois (3) grandeurs de base M, L et T

d'après le théorème π , le nombre de grandeurs adimensionnelles π_i et donné par l'équation $p = n(\text{grandeurs physiques}) - m(\text{dimensions}) = 7 - 3 = 4$.

Donc, on a π_1, π_2, π_3 et π_4 .

Calcul de π_i ($L=1, 4$)

Rappelons que la dimension d'une grandeur ~~physique~~ ^{physique "G"} est obligatoirement de la forme $[G] = M^a \cdot L^b \cdot T^c \cdot \theta^d \cdot I^e \cdot N^f \cdot J^g$

Pour trouver l'expression de 4 grandeurs adimensionnelles, nous procédons comme suit:

1- parmi les 7 grandeurs physiques ($\Delta P, \varepsilon, V, L, D, \rho$ et μ) on choisit "3" grandeurs fondamentales. Ceux-ci doivent être en relation avec l'échelle du problème, les conditions cinématiques et la masse ou les forces du système. Donc, dans ce cas, les grandeurs fondamentales sont "D" (échelle), ~~V~~ ^V (cinématique) et ρ (masse), et on écrit pour l'expression des π_i :

$$\pi_1 = V^{a_1} \rho^{b_1} D^{c_1} \cdot \Delta P^1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 \text{ car } \pi_1 \text{ est sans dimension}$$

$$\pi_2 = V^{a_2} \rho^{b_2} D^{c_2} \cdot L^1 = \text{''} \quad \text{''} \quad \pi_2 \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\pi_3 = V^{a_3} \rho^{b_3} D^{c_3} \cdot \varepsilon^1 = \text{''} \quad \text{''} \quad \pi_3 \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\pi_4 = V^{a_4} \rho^{b_4} D^{c_4} \cdot \mu^1 = \text{''} \quad \text{''} \quad \pi_4 \quad \text{''} \quad \text{''}$$

Résolution: 1) Détermination de l'expression de $\pi_1 = ?$

$$\Pi_1 = (LT^{-1})^{a_1} \cdot (ML^3)^{b_1} \cdot (L)^{c_1} \cdot (ML^{-1}T^{-2})^1 = L^{a_1-3b_1+c_1-1} \cdot M^{b_1+1} \cdot T^{-a_1-2} = L^0 M^0 T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - 3b_1 + c_1 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 3b_1 - c_1 + 1 = -3 + 2 + 1 = \boxed{0 = c_1} \\ b_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1} \\ -a_1 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \Pi_1 = V^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot D^0 \cdot \Delta P^1 = \boxed{\frac{\Delta P}{\rho V^2} = \Pi_1}$$

2) Détermination de Π_2

$$\Pi_2 = (LT^{-1})^{a_2} \cdot (ML^{-3})^{b_2} \cdot (L)^{c_2} \cdot L = L^{a_2-3b_2+c_2+1} \cdot M^{b_2} \cdot T^{-a_2} = L^0 M^0 T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 - 3b_2 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 3b_2 - a_2 - 1 = 3 \times 0 - 0 - 1 = \boxed{-1 = c_2} \\ \boxed{b_2 = 0} \\ \boxed{a_2 = 0} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Pi_2 = V^0 \cdot \rho^0 \cdot D^{-1} \cdot L = \boxed{L/D = \Pi_2}$$

3) Détermination de Π_3

$$\Pi_3 = (LT^{-1})^{a_3} \cdot (ML^{-3})^{b_3} \cdot (L)^{c_3} \cdot L = L^{a_3-3b_3+c_3+1} \cdot M^{b_3} \cdot T^{-a_3} = L^0 M^0 T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 - 3b_3 + c_3 + 1 = 0 \Rightarrow c_3 = 3b_3 - a_3 - 1 = 0 - 0 - 1 = \boxed{-1 = c_3} \\ \boxed{b_3 = 0} \\ \boxed{a_3 = 0} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Pi_3 = V^0 \cdot \rho^0 \cdot D^{-1} \cdot \varepsilon = \boxed{\frac{\varepsilon}{D} = \Pi_3}$$

4) Détermination de Π_4

$$\Pi_4 = (LT^{-1})^{a_4} \cdot (ML^3)^{b_4} \cdot (L)^{c_4} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^1 = L^{a_4-3b_4+c_4-1} \cdot M^{b_4+1} \cdot T^{-a_4-1} = L^0 M^0 T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_4 - 3b_4 + c_4 - 1 = 0 \Rightarrow c_4 = 3b_4 - a_4 + 1 = 3(-1) - (-1) + 1 = \boxed{-1 = c_4} \\ b_4 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_4 = -1} \\ -a_4 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = -1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Pi_4 = V^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot D^{-1} \cdot \mu = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{VD} = \frac{\nu}{VD} = \frac{1}{Re} \quad \text{Re = nombre de Reynolds}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_4 = \frac{1}{Re}}$$

on cherche une relation du type $\Delta P = f(L, D, \varepsilon, \rho, \mu, V) \Rightarrow$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{Re}\right)$$

Requ: Cette relation ou ce résultat peut être utilisé dans le cas de la similitude

Ainsi pour avoir une similitude entre la maquette et le prototype (même chute de pression) il faut avoir les mêmes rapports de L/D et $\frac{\rho}{\mu}$ et le même Reynolds.

Solution de l'exercice ① (donné dans la page 2)

En utilisant l'analyse dimensionnelle " $n=5$ " grandeurs physiques et 3 dimensions fondamentales: $n=5$, $m=3 \Rightarrow p=5-3=2$ grandeurs adimensionnelles Π_1 et Π_2

L'utilisation de l'analyse dimensionnelle donne: $C_D = f(Re)$ ou

$$\left(\frac{F/D^2}{\rho v^2}\right) = f\left(\frac{VD}{\nu}\right) \text{ où } C_D \text{ est le coefficient de traînée}$$

Re : et le nombre de Reynolds

Or pour le prototype: $Re_p = \frac{v_p \cdot D_p}{\nu_p} = \frac{2,5 \times 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 5,77 \times 10^5$

Comme $Re_p = Re_m$ en utilisant la condition de similitude, on

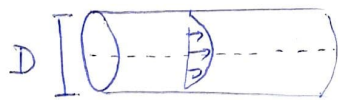
$$v_m = \frac{Re_p \cdot \nu_m}{D_m} = \frac{5,77 \times 10^5 \times 1,5 \times 10^{-5}}{0,15} = 57,7 \text{ m/s}$$

aussi, comme $(C_D)_p = (C_D)_m$ (condition de similitude) C_D : coeff de traînée

Donc: $\frac{F_p}{v_p^2 \rho_p D_p^2} = \frac{F_m}{v_m^2 \rho_m D_m^2} \Rightarrow F_p = F_m \left[\frac{v_p^2}{v_m^2} \times \frac{\rho_p}{\rho_m} \times \frac{D_p^2}{D_m^2} \right] = 278 \text{ N}$

Application de l'analyse dimensionnelle aux problèmes de la convection

Soit un écoulement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'une conduite cylindrique de diamètre D .



Les paramètres de ce problème sont: le diamètre " D ", la vitesse moyenne " v ", la masse volumique " ρ ", la viscosité dynamique " μ ". En plus de ces paramètres on rajoute ceux liés aux transferts de chaleur: la conductivité thermique du fluide " λ ", la chaleur spécifique du fluide " C_p " et le coefficient d'échange de chaleur entre la paroi et le fluide " h ". On compte 7 grandeurs physiques. Les unités fondamentales de ces grandeurs sont: $[D] = L$, $[v] = L T^{-1}$, $[\rho] = M L^{-3}$, $[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$

$$C_p: \text{J/kgK} = \text{F} \cdot \text{L} / \text{kgK} \Rightarrow [C_p] = \frac{M L T^{-2}}{M \theta} = L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$\lambda = W m^{-1} K^{-1} \Rightarrow \frac{J}{s} m^{-1} K^{-1} = F \cdot m s^{-1} m^{-1} K^{-1} \Rightarrow [\lambda] = M L T^{-2} K^{-1} \theta^{-1}$$

$$[\lambda] = M L T^{-2} \theta^{-1} \text{ de même pour } h = W / (m^2 K) \Rightarrow [h] = L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

Comme pour le problème de la chute de pression: on a 7 grandeurs physiques et 4 unités fondamentales (M, L, T et θ) donc le nombre de grandeurs adimensionnelles $p = 7 - 4 = 3$ soit π_1, π_2 et π_3 .

On choisit "4" grandeurs fondamentales parmi les 7 grandeurs physiques qui sont D, μ, ρ, λ (échelle, propriétés thermophysiques) (masse, diffusion de matière et diffusion de chaleur).

Donc l'expression de 3 π est comme suit:

$$\pi_1 = D^{a_1} \mu^{b_1} \rho^{c_1} \lambda^{d_1} h^1, \pi_2 = D^{a_2} \mu^{b_2} \rho^{c_2} \lambda^{d_2} c_p^1, \pi_3 = D^{a_3} \mu^{b_3} \rho^{c_3} \lambda^{d_3} \rho^1$$

La résolution de ces trois quantités, en suivant les mêmes étapes que pour le cas de chute de pression donne:

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}, \pi_2 = \frac{\mu c_p}{\lambda} \text{ et } \pi_3 = \frac{\rho V D}{\mu}$$

π_1 : représente le nombre de Nusselt, donc $Nu = \frac{h D}{\lambda}$

π_2 : " " " " Prandtl, " $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\mu c_p \rho}{\lambda \rho} = \nu \frac{c_p \rho}{\lambda} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}}$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (\nu: \text{viscosité cinématique}, a: \text{diffusivité thermique})$$

$\pi_3 = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \left(\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{\nu} \right)$ est le nombre de Reynolds $Re = \frac{V D}{\nu}$

La relation recherchée est du type

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \Rightarrow Nu = f(Pr, Re)$$

Il existe plusieurs corrélations entre Nu et Re, Pr en fonction du régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent) et de la nature de la convection (naturelle ou forcée) ou de la géométrie considérée.

Ces corrélations seront présentées dans les prochains cours.

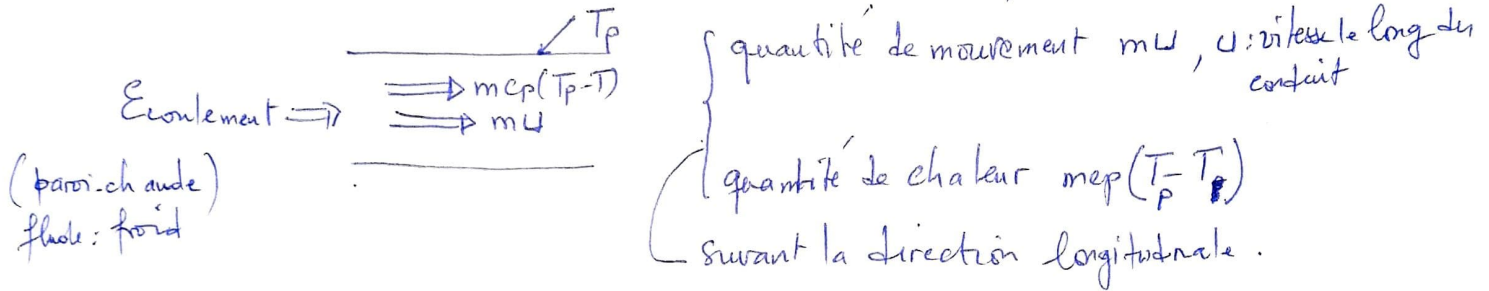
Analogie de Reynolds

L'analogie de Reynolds associe le transfert de chaleur au frottement pariétal.

Dans certains cas (conditions spécifiques: absence de gradient de pression externe et nombre de Prandtl égal à 1 c-à-d $\nu = \alpha$) la quantité de mouvement et le transfert de chaleur (ou transfert de masse) peuvent être liés par une relation unique. Une comparaison entre transfert de quantité de mouvement et de chaleur est présentée ci-dessous.

	diffusivité	flux diffusif	Coeff transport	groupe sans dimension
Transfert de chaleur :	α	$- \alpha \frac{d}{dx} (\rho c_p T)$	$h: \Phi = h \Delta T$	$Nu = \frac{h L_c}{\alpha}$
.. de quantité de mouvement:	ν	$- \mu \frac{du}{dx}$	$\frac{f}{2}: \tau = \frac{f}{2} \rho U^2$	$\frac{f}{2} = \frac{\mu}{\rho U^2} \frac{du}{dx} \Big _{x=0}$

Pour le cas d'un écoulement dans un conduit, on a:



suivant la direction \perp à l'écoulement, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f \rho U^2}{2} \\ h(T_p - T) \end{array} \right.$$

et le rapport $\frac{\mu u}{m c_p (T_p - T)}$ doit être égal au rapport $\frac{f \rho U^2}{h (T_p - T)}$

Donc: $\frac{\mu u}{m c_p (T_p - T)} = \frac{f \rho U^2}{h (T_p - T)}$ rapport suivant la direction verticale

rapport de 2 grandeurs suivant la direction horizontale

En simplifiant $(T_p - T)$ et U des deux côtés de l'égalité, on aura: $\boxed{\frac{f}{2} = \frac{h}{\rho c_p U}}$

Cette dernière égale représente l'analogie de Reynolds

(entre transfert de quantité de mouvement et transfert de chaleur)

le rapport $\frac{h}{\rho c_p U}$ est sans dimension, il représente le nombre de Stanton St''

Donc $\boxed{\frac{f}{2} = St}$ c-à-d connaissant le champ thermique (par mesure exp)

on peut déterminer les caractéristiques du champ dynamique et ~~inversement~~ inversement. c-à-d connaissant le champ dynamique

on peut obtenir moyennant cette formule le caractéristique du champ thermique

Lorsque $Pr \neq 1$, cette analogie est remplacée par l'analogie de Chilton-Colburn. dont l'expression est:

$$\frac{Cf}{2} = St \cdot Pr^{2/3} \quad \text{avec } 0,6 \leq Pr \leq 60$$

Rq: le nombre de St peut se mettre en fonction du nombre de Nusselt de Reynolds et de Prandtl.

$$St = \frac{h}{\rho c_p u} = \frac{\frac{h L_c}{\lambda_f}}{\frac{u L_c}{\nu} \cdot \frac{\rho c_p \nu}{\lambda_f}} = \frac{\left(\frac{h L_c}{\lambda_f}\right) Nu}{Re Pr} \quad \text{car } Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda_f}$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr}$$

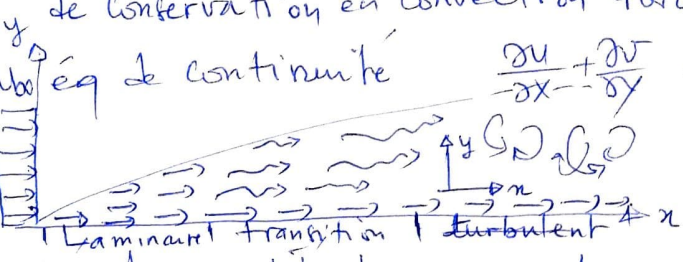
Donc pour l'analogie de Reynolds $\frac{Cf}{2} = St = \frac{Nu}{Re Pr}$
 " " " Chilton-Colburn $\frac{Cf}{2} = St \cdot Pr^{2/3} = \frac{Nu Pr^{2/3}}{Re Pr}$

Chap 2: Convection Forcée

1) Écoulements externes

1.1 Écoulement sur une plaque plane: Solution de Blasius

En appliquant l'hypothèse de Prandtl (déjà vue aux précédents cours) sur les équations de conservation en convection forcée, nous obtenons les éqs suivants.


 éq de continuité $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ou u : composante de la vitesse dans la direction horizontale (direction de l'écoulement sur la plaque) et " v " dans la direction \perp à l'écoulement

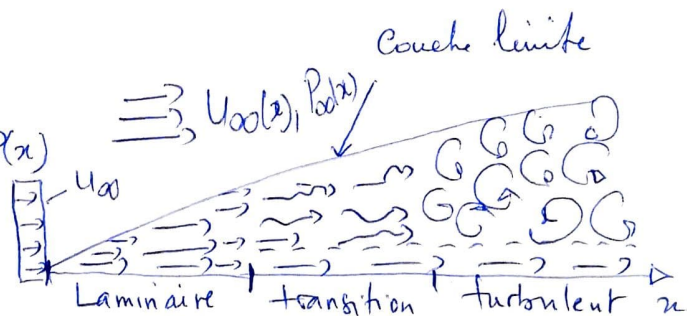
éq de quantité de mouvement: suivant ox

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

suivant oy $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow P = P(x)$

En résumé

$$a) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow P = P(x) \text{ uniquement} \end{cases}$$



On constate que quelle que soit l'abscisse x choisie, l'allure générale de variation de la vitesse "u" en fonction de l'abscisse L à l'écartement "y" reste la même: très proche de la paroi on constate une variation très rapide de "u" en fonction de "y". Ensuite une variation de + en + lente de "u" est constatée. Lorsqu'on s'éloigne de la paroi u tend asymptotiquement vers U_{∞} (vitesse à l' ∞) c-à-d loin de la plaque. Finalement $u = 0$ à la paroi.

Pour résoudre les eqs de la couche limite, il faut rajouter les conditions aux limites: en $y=0$ $u(y=0)=0$
 en $y=\delta$ $u=U_{\infty}$ (δ : est l'épaisseur de la couche limite)
 en $x=0$ $u=U_{\infty}$.

Solution de Blasius

La solution des équations de couche limite (sys deqs à page 9) a été faite par Blasius en 1908 pour le cas de l'écoulement sur une plaque plane avec l'hypothèse que U_{∞} (vitesse loin de la plaque) = cste ce qui implique que $\frac{dP}{dx} = 0$ ds l'équation de quantité de mouvement suivant ox (syst à page 9).

En effet comme $P=P(x)$ c-à-d que la pression est indépendante de la direction "oy"
 $\Rightarrow P=P(x) = P_{\infty}(x)$ ou $P_{\infty}(x)$ est la pression de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite (voir fig 1 page 9)

En dehors de la C.L l'équation de Bernoulli donne: $P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = \text{cste}$

$$\Rightarrow \frac{dP_{\infty}}{dx} = \frac{dP}{dx} = -\rho U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \text{ si } U_{\infty} = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP_{\infty}}{dx} = \frac{dP}{dx} = 0$$

c-à-d gradient de pression nul ds l'éq de q'té de m't suivant ox

le système (a) page (9) devient

$$(a) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \dots (1) \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dots (2) \end{cases}$$

$x=0$ $u=U_{\infty}$
 + C.L $y=0$ $u=0, v=0$
 $y \rightarrow \infty(\delta)$ $u=U_{\infty}$

L'éq (1) permet de définir une fonction de courant notée $\psi(x,y)$ telle que:

$$(3) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ ce qui vérifie toujours } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(3) \text{ dans } (2) \text{ donne: } \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \dots (4)$$

avec la nouvelle C.L: $y=0$ $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, $y \rightarrow \infty(\delta)$ $\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty}$.

Pour transformer l'éq (4) en une équation différentielle ordinaire (EDO), Blasius propose de considérer la coordonnée non-dimensionnelle $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x}$ ou $Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$ est le nombre de Reynolds local c-à-d à une abscisse "x" donnée, et une fonction de courant sans dimensions donnée par l'expression

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\nu x U_\infty}} \psi(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{U_\infty x} \sqrt{Re_x} \Rightarrow \psi(x, y) = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$$

Il reste maintenant d'exprimer l'équation (4) en fonction de f et de η.

Ainsi: $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{\nu x U_\infty} \cdot f(\eta) \right] = \underbrace{\sqrt{\nu x U_\infty}}_{\text{indép de } y} \frac{\partial}{\partial y} (f(\eta)) = f'(\eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$

Donc $u = \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$

D'après la définition de "η" (ci-dessus) $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \Rightarrow \frac{d\eta}{dy} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ et $\frac{df(\eta)}{d\eta} = f'(\eta)$

Donc

$$u = \sqrt{\nu x U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f'(\eta) = \sqrt{\frac{\nu x U_\infty^2}{\nu x}} f'(\eta) = U_\infty f'(\eta)$$

$$\bullet \boxed{u = U_\infty f'(\eta) = \frac{\partial \psi}{\partial y}} \quad (a)$$

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty f'(\eta)) = \frac{d\eta}{dx} \times U_\infty \times \frac{\partial f'(\eta)}{\partial \eta} = \boxed{U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(\eta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}} \quad (b)$$

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty f'(\eta)) = U_\infty \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} = U_\infty f''(\eta) \times \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right) = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{d}{dx} (x^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2x} y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(\eta) = \boxed{-\frac{U_\infty}{2x} \eta f''(\eta) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}} \quad (c)$$

$$\bullet v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)) = -\left\{ \sqrt{\nu U_\infty} \left(\frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} \right) f(\eta) + \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f)} \quad (d)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(\eta) \right) = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \frac{\partial}{\partial x} (f''(\eta)) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} = \frac{U_\infty^2}{\nu x} f'''(\eta) \quad (e)$$

En remplaçant les expressions (a), (b), (c), (d) et (e) dans l'équation (4), on obtient

$$\frac{-u_\infty^2}{2x} \eta f f'' + \frac{1}{2} \frac{u_\infty^2}{x} \eta f f'' - \frac{u_\infty^2}{2x} f f'' = \frac{u_\infty^2}{2x} \cdot f''' \times 2$$

Ce qui donne: $\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0$ ou bien $\boxed{2 f''' + f f'' = 0}$ (5)

Cette équation est l'équation de Blasius pour la couche limite sur 1 plaque plane.

Les conditions aux limites associées à cette équation sont:

$$\begin{cases} \text{en } \eta = 0 : & f' = \frac{u}{u_\infty} = 0, \quad f = 0 \\ \text{en } \eta = \infty & f' = \frac{u}{u_\infty} = 1 \end{cases} \quad \text{Rq: } \eta = \infty \text{ correspond à l'épaisseur de la c.l.}$$

Pour résoudre l'équation de Blasius, on peut utiliser la méthode de Runge-Kutta.

Rq: L'équation de Blasius est une équation différentielle à une inconnue $f(\eta)$ et une seule variable " η ". Cette équation remplace le système d'équations (6) (page 10) à deux inconnues $u(x, y)$ et $v(x, y)$.

Les résultats de la résolution de l'éq de Blasius en prenant pour valeurs pour démarrer les calculs ($\eta = 0, f = 0, f' = 0$ et $f'' = 0,33206$) sont présentés ~~comme suit~~ dans le tableau 1:

En se basant sur les valeurs de η, f, f' et f'' du tableau 1, on peut déterminer:

- la composante longitudinale (le long de l'axe ox) U de la vitesse $f'(\eta) = \frac{U}{u_\infty}$ d'où $U = u_\infty f'(\eta)$ (on voit bien que U varie entre 0 et $0,994 u_\infty$)
- la composante perpendiculaire à l'écoulement " v " où

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ou $\frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} (\eta f' - f)$ avec $Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu}$ nbre de Reynolds local.

Cette expression aura pour valeurs quand $y \rightarrow \infty$. $\frac{v_\infty}{U_\infty} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} \left(\begin{matrix} \eta \\ 5 \times 0,9915 - 3,28529 \end{matrix} \right)$

$\frac{v_\infty}{U_\infty} = \frac{0,837105}{\sqrt{Re_x}}$. On remarque qu'au delà d'un certain valeurs de " x "

$\frac{v_\infty}{U_\infty} \ll 1$ (cette valeur correspond \approx à $Re_x = 2500$)

Tableau 1: résultats de la solution numérique de l'éq de B. L. par la méthode de

Runge-Kutta. ($\Delta \eta = 0,2$)

η	f	f'	f''
0	0	0	0,33206
0,2	0,00664	0,06641	0,33199
0,4	0,02656	0,13277	0,33147
0,6	0,05974	0,19894	0,33008
0,8	0,10611	0,26471	0,32739
1,0	0,16557	0,32979	0,32301
1,4	0,32298	0,45627	0,30787
1,8	0,52952	0,57477	0,28293
2,2	0,78120	0,68132	0,24835
2,6	1,07252	0,77246	0,20646
3,0	1,39682	0,84605	0,16136
4,0	2,30576	0,95552	0,06484
5,0	3,28329	0,99155	0,01591
6,0	4,27964	0,99898	0,00240
7,0	5,27926	0,99992	0,00022

$\eta \rightarrow \infty \quad f' = \frac{u}{u_{\infty}} = 1$, on voit que pour $\eta = 5 \quad \frac{u}{u_{\infty}} = f' \approx 1$
 Cette valeur de η correspond bien à la condition aux limites pour résoudre l'éq D.O

Calcul de la contrainte tangentielle à la paroi

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \text{ or } \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{2\nu x}} f'' \text{ et en } y=0 \text{ (} \eta=0 \text{)} f'' = 0,332$$

$$\Rightarrow \tau_p = 0,332 \rho u_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \Rightarrow \text{le coeff de frottement local } C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} =$$

$$C_{f/2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}} \text{ et le coeff de frottement moyen } \frac{C_{fm}}{2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_L}} \text{ par intégration en } 0 \text{ et } L$$

Couche limite thermique: Écoulement sur plaque plane

L'équation de conservation d'énergie s'écrit comme suit (Écoulement bid, stationnaire, laminaire) $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$ $a = \frac{\lambda}{(\rho c_p)_f}$ diffusivité thermique du fluide

En se basant sur les hypothèses de la C.L dynamique, en particulier: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

L'équation de conservation d'énergie ~~prend la~~ devient:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (a)$$

Une ressemblance est observée entre cette équation et les eqs de conservation de quantité de mouvement. Donc si l'éq (a) traduit l'équilibre entre l'advection (membre gauche) et la diffusion (membre de droite), il en va de même pour les eqs de quantité de mouvement où le transfert de quantité de mouvement se fait aussi par advection (gauche) et par diffusion (droite). Donc ν en fait la diffusivité associée au transfert de quantité de mouvement, comme "a" qui est associée au transfert de chaleur. Ces deux quantités doivent avoir la même dimension " $m^2 s^{-1}$ ". Cette analogie entre les 2 phénomènes (hydrodynamique et thermique) présente des comportements similaires, en particulier dans la formation de la couche limite.

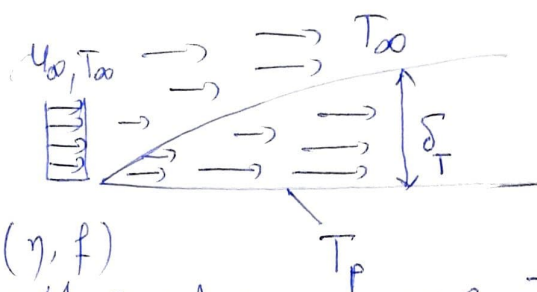
Le rapport ν/a est appelé nombre de Prandtl. On constate trois intervalles de valeurs de Pr

$Pr = \frac{\nu}{a} \gg 1$ l'épaisseur de la couche limite thermique δ_T se développe moins vite que δ_h .

C'est le cas des liquides (eau, huile, solvant organiques, ...)

$Pr = \frac{\nu}{a} \approx 1$ δ_T se développe quasiment de la même manière que δ_h : ($\delta_T \approx \delta_h$) "gaz"

$Pr = \frac{\nu}{a} \ll 1$ δ_T se développe plus vite que δ_h c'est le cas des métaux liquides (sodium liquide, ...).



Equation de Pohlhausen:

En plus des variables de Blasius (η, f)

on fait intervenir une nouvelle variable sans dimension notée $\xi = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$ ou on suppose que ξ ne dépend que de η comme la fonction "f"

En portant ds l'équation de l'énergie

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ y=0 \quad T=T_p \quad y \rightarrow \infty \quad T=T_\infty \end{cases}$$

Les expressions de u et de v et celle ds dérivées de f/η ; on arrive à l'équation:

$$CL \quad \begin{cases} \xi'' + \frac{1}{2} Pr f \xi' = 0 \rightarrow \text{équation de Pohlhausen} \\ \eta=0 \quad f'=0, f=0 \quad \xi=0 \quad (\text{car } T=T_p) \\ \eta=\infty \quad f'=1 \quad \xi=1 \quad (\text{car } T=T_\infty) \end{cases}$$

En faisant 2 intégrales successives, on arrive à déterminer ξ :

$$\xi = \frac{\int_0^\eta \exp\left[-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right] d\eta}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right] d\eta}$$

Cas particulier: lorsque $Pr=1$: de l'équation de Blasius et de Pohlhausen

on a $\xi' = f''$ d'où $\xi = f' = \frac{u}{U_\infty} = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$ résultat attendu? Car lorsque $v=a$: Eqs de qte de η et ξ sont identiques à l'éq de l'énergie

C-a-d que: la loi de distribution des températures est identique à la loi de distribution de vitesse.

Calcul du transfert de chaleur entre l'écoulement laminaire et la paroi pour Pr

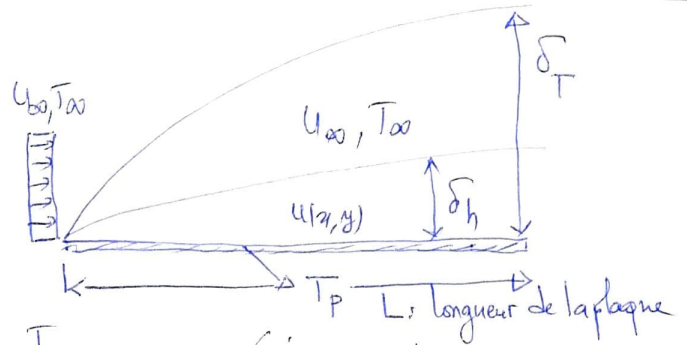
• $Pr \ll 1$ ce qui signifie que $\delta_T \gg \delta_h$ - la couche limite hydrodynamique est incluse à l'intérieur de δ_T . Donc, on peut supposer qu'en tout point de la couche limite, l'écoulement est celui que l'on trouve à l' ∞ . C-a-d $u(x,y) \approx U_\infty$ et $v=0$ (Voir figure A- après). L'équation de l'énergie est

$$U_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Comme $\delta_T \ll L \Rightarrow \frac{1}{\delta_T} \gg \frac{1}{L}$

Donc les ordres de grandeurs des dérivées de T à x et y sont comme suit

$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \sim \frac{T_p - T_\infty}{L^2}$ et $\left| \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right| \sim \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T^2}$ on en déduit que $\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|$



l'équation de l'énergie devient, comme suit: $u_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$
 or $\frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{T_p - T_\infty}{L} \Rightarrow \frac{u_\infty}{a} \frac{T_p - T_\infty}{L} \sim \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T^2}$ $T_p > T_\infty$ (paroi chaude, fluide froid)

d'où la valeur approximative (l'ordre de grandeur) de δ_T

$\delta_T^2 \sim \frac{aL}{u_\infty} \Rightarrow \delta_T \sim \sqrt{\frac{aL}{u_\infty}}$

Cherchons l'ordre de grandeur du coefficient d'échange "h" entre la paroi et le fluide

$\phi = h(T_p - T_\infty) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \lambda \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T} \Rightarrow h = \frac{\lambda T_p - T_\infty}{\delta_T T_p - T_\infty}$

donc $h \sim \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{aL}} \sim \frac{\lambda}{\delta_T} \Leftrightarrow$ à la conductance d'un mur plan d'épaisseur δ_T et de conductivité λ . le coeff d'échange, h, est donc la conductance de la C.L. thermique.

L'expression de " δ_T " et de "h" sous forme adimensionnelle est obtenue en introduisant les nombres de Re, Pr et de Nusselt, Nu.

Le nombre de Re est défini comme $\frac{u_\infty L}{\nu} \Rightarrow Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$, $Pr = \frac{\nu}{a}$ et $Nu = \frac{hL}{\lambda}$

Ce qui donne: $\delta_T / L \sim \left(\frac{u_\infty L}{\nu} \frac{\nu}{a} \right)^{-1/2}$

En d'autres termes

$\frac{\delta_T}{L} \sim \frac{\alpha}{u_\infty \nu} \cdot \frac{L}{L} \Rightarrow \frac{\delta_T}{L} \sim \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{Pr} \cdot L$

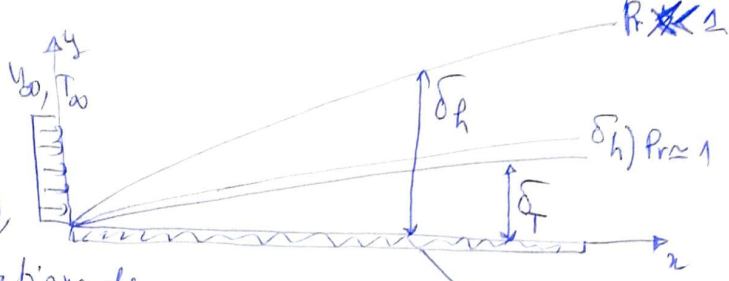
$\frac{\delta_T^2}{L^2} \sim \frac{\nu}{u_\infty L} \cdot \frac{a}{\nu} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{Pr} \Rightarrow \frac{\delta_T}{L} \sim (Re \cdot Pr)^{-1/2}$

La solution analytique de l'équation de l'énergie précédent est donnée par

$\frac{T(x,y) - T_p}{T_\infty - T_p} = \text{erf} \left(\frac{y}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{ax}} \right)$ d'où $h(x) = \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\pi ax}}$ et

$\bar{h} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u_\infty}{aL}} \Rightarrow Nu = \frac{\bar{h} L}{\lambda} = 1,13 Re^{1/2} Pr^{1/2}$
 valable pour $Pr \ll 1$

- Cas où $Pr \gg 1$ ou $Pr \approx 1$



Contrairement au cas précédent ($Pr \ll 1$), dans ce cas, il faut tenir compte de variations de vitesse à l'intérieur de la couche limite δ_T . Donc, il faut résoudre le Pb dynamique pour obtenir le champ de vitesse, puis l'insérer dans l'équation de conservation de l'énergie avant de pouvoir la résoudre.

La résolution des eqs de quantité de mouvement de l'énergie donne l'expression du nombre de Nusselt local suivante.

$$Nu(x) = \frac{h(x)L}{\lambda} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{valable pour } \begin{cases} Re_x < 5 \cdot 10^5 \\ 0,6 < Pr < 60 \end{cases}$$

Le nombre de Nu moyen est obtenu en intégrant $Nu(x)$ entre 0 et L, ce qui donne:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h} \cdot L}{\lambda} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

Dans ces deux expressions $h(x)$ et \bar{h} sont le coeff de transfert de chaleur local et moyen, respectivement.

Reyn local : signifie à une position "x" donnée $0 < x \leq L$ longueur de la plaque et où $Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu}$ et $Re_L = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu}$.

- En régime turbulent $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$ $Nu_L = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{1/3}$ ($0,6 < Pr < 60$)
- Dans le cas où on est en présence des deux régime de ~~écoulement~~ (laminaire + turbulent) sur la plaque, on a: $Nu = \frac{hL}{\lambda} = (0,037 Re_L^{0,8} - 871) Pr^{1/3}$
 $0,6 \leq Pr \leq 60$
 $5 \cdot 10^5 \leq Re_L < 10^7$

Exemple: Un huile à $60^\circ C$ s'écoule sur la surface supérieure d'une plaque plane de longueur 5m et de température $20^\circ C$. La vitesse de l'huile est de 2m/s. Déterminer le taux de transfert de chaleur cédé à la plaque/unité de longueur.

Solution: les propriétés de l'huile à la température du film $T_f = \frac{T_{huile} + T_{plaque}}{2}$

Donc à $T_f = 40^\circ C$, on a: $\rho = 876 \text{ kg m}^{-3}$, $\lambda = 0,144 \text{ W m}^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$, $Pr = 2870$
 et $\nu = 242 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

pour $L = 5 \text{ m} \Rightarrow Re_L = 4,13 \cdot 10^4 < Re_c = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$ le régime d'écoulement est laminaire \Rightarrow on utilise la corrélation $Nu = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$

Donc $Nu = \frac{hL}{\lambda} \Rightarrow 1918 \Rightarrow h = \frac{Nu \lambda}{L} = 55,2 \text{ W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
 $\Rightarrow \varphi = hS(T_{\infty} - T_p) = 55,2 \times (5 \times 1) (60 - 20) = 11.040 \text{ W}$

Exemple 2: De l'air à 20°C s'écoule sur une plaque plane de dimensions $1,5\text{m} \times 6\text{m}$. La température de la plaque est de 140°C . Déterminer le taux de transfert de chaleur entre la plaque et l'air si l'air s'écoule a) Parallèlement à la dimension de 6m , b) Parallèlement à la dimension de $1,5\text{m}$. On donne $v_{\infty} = 8\text{m/s}$

Les propriétés de l'air à $T_f = \frac{140 + 20}{2} = 80^\circ\text{C}$ sont: $\lambda = 0,02953 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $Pr = 0,7154$
 ~~$\nu = 2,58 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$~~ à $P = 1 \text{ atm}$ $\nu = 2,548 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

a) $Re_L = 1,884 \times 10^6 = \frac{v_{\infty} L}{\nu} = \frac{8 \times 6}{2,548 \times 10^{-5}} \Rightarrow Re_L > 5 \cdot 10^5$ le régime d'écoulement est turbulent en $x=L$

Pour $x < 0,158 \text{ m}$ le régime d'écoulement est laminaire

En conclusion: l'écoulement sur la plaque présente deux régimes (turbulent + laminaire). Donc la corrélation utilisée est $Nu = \frac{hL}{\lambda} = (0,037 Re_L^{0,8} - 871) Pr^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow Nu = 2687$ d'où $h = \frac{Nu \lambda}{L} = 13,2 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

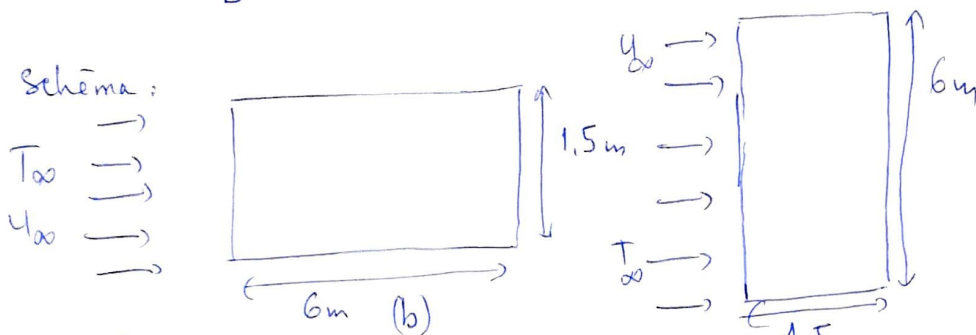
$S = 1,5 \times 6 = 9 \text{ m}^2$

\Rightarrow Le flux échangé $\varphi_a = hS(T_p - T_{\infty}) = 13,2 \times 9 \times (140 - 20) = 1.425 \times 10^4 \text{ W}$

b) Écoulement // à la dimension $1,5\text{m}$: $Re_L = 4,71 \times 10^5$ écoulement laminaire sur toute la plaque car $Re_L < Re_c$. La corrélation est $Nu = 0,664 Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow Nu = 408$ d'où $h = \frac{Nu \lambda}{L} = 8,03 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

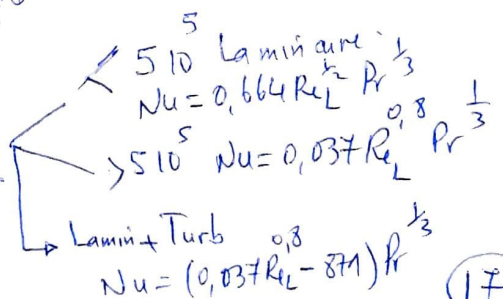
$\Rightarrow \varphi_b = hS(T_p - T_{\infty}) = 8,03 \times 9 \times (140 - 20) = 8670 \text{ W} < \varphi_a$



Rq: Procédure de résolution d'un Pb de

convection sur une plaque plane: - on calcule Re_L

- Nu connu $\Rightarrow h = \frac{Nu \lambda}{L} \Rightarrow \varphi = hS(T_p - T_{\infty})$



Travaux dirigés (TD)

Ex01: De l'air s'écoulant sur une plaque de longueur $L = 2,15 \text{ m}$ et de largeur $b = 3 \text{ m}$.

La vitesse du courant libre est $U_{\infty} = 2 \text{ m/s}$. Déterminer l'expression des grandeurs suivantes: $\delta_h(L)$, $C_f(L)$, $\tau_w(L)$, C_D , F_D , ~~et~~ respectivement (épaisseur de la couche limite hydrodynamique, Coefficient de frottement, Contrainte de cisaillement en $x=L$, Coefficient de traînée et force de traînée, respectivement).

On donne pour l'air $\rho = 1,23 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu = 1,46 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Solution: Calculons le nombre de Reynolds $Re_L = \frac{2 \times 2,15}{1,46 \times 10^{-5}} = 2,945205 \times 10^5 < 5 \times 10^5$
L'écoulement est laminaire, donc:

• $\delta_h(L) = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{5 \times 2,15}{\sqrt{2,945205 \times 10^5}} = 1,98 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,98 \text{ cm}$. (d'une manière générale $\delta_h(x) = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$.)

• $C_f(x=L) = 0,664 / \sqrt{Re_L} = 1,223 \times 10^{-3}$ (sans dimension)

• La contrainte de cisaillement en $x=L$: $\tau_w(x=L) = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 C_f(x=L) = 0,5 \times 1,23 \times (2)^2 (1,223 \times 10^{-3})$

• Le coeff de traînée: $C_D = 1,328 / \sqrt{Re_L} = 2,45 \times 10^{-3}$ (sans dimension) $= 0,0030 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

• La force de traînée:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 L} \Rightarrow F_D = \frac{1}{2} L \rho U_{\infty}^2 C_D \approx 1,30 \times 10^{-2} \text{ N. (pour 1 seule face)}$$

Ex02

De l'air à 27°C (assimilé à un gaz parfait) s'écoule sur une plaque plane à une vitesse de 2 m/s . Calculez l'épaisseur de la couche limite ~~hydrodynamique~~ ^{hydrothermique} en $x = 20$ et 40 cm .

On donne pour l'air à 27°C $\mu = 1,85 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$ à la pression 1 atm.

L'air gaz parfait $\Rightarrow \rho = \frac{P}{RT} = \frac{1,01325 \times 10^5}{287 \times 300} = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$

Rque:

$(PV = nRT \Rightarrow P \frac{M}{\rho} = nRT)$ où $\rho = \frac{P}{RT} \times \left(\frac{M}{n}\right) = \left(\frac{M}{R}\right) \frac{P}{T} = \frac{P}{R'T}$ (Masse molaire M ($M = 28,97610 \text{ kg/mol}$))

Calcul de Re_n en $x = 20$ et 40 cm

$$Re_{n=20\text{cm}} = \frac{1,177 \times 2 \times 0,2}{1,85 \times 10^{-5}} = 2,545010^4, \quad Re_{n=40\text{cm}} = \frac{1,177 \times 2 \times 0,4}{1,85 \times 10^{-5}} = 5,089710^4$$

$$\delta_h(x) \approx \frac{5x}{\sqrt{Re_n}} \Rightarrow \delta_h(x=20\text{cm}) = \frac{5 \times 0,2}{\sqrt{2,5450 \times 10^4}} = 6,268 \text{ mm}$$

$$\delta_h(x=40\text{cm}) = \frac{5 \times 0,4}{\sqrt{5,0897 \times 10^4}} = 8,865 \text{ mm}$$

$\delta_h(x=40\text{cm}) > \delta_h(x=20\text{cm})$
résultat logique car δ_h avec x .

Pour les mêmes données de l'exo2, calcul de flux de chaleur transféré aux fluides en $x=20\text{ cm}$ et en $x=40\text{ cm}$ si la température de la plaque est de $60^\circ\text{C} = T_p$

• Calcul de la T_f du film $T_f: T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{60 + 27}{2} = \frac{87}{2} = 43,5^\circ\text{C}$

donc les propriétés de l'air doivent être prises à la température T_f à T_f et d'après les tableaux donnant ces propriétés ($\lambda, \rho, \mu, \nu, \dots$) en fonction de T

on trouve: pour $T_f = 43,5^\circ\text{C}: \nu = 17,36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \lambda = 0,02749 \text{ W/(m}\cdot\text{C)}$

$Pr = 0,70$ et $c_p = 1,006 \text{ kJ/kg}\cdot\text{C}$

Solution:

• Premièrement calcul de Re_x pour connaître le régime de l'écoulement.

en $x=20\text{ cm}$ $Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu} = \frac{2 \times 0,2}{17,36 \cdot 10^{-6}} = 23041,47 = 2,30415 \cdot 10^4$

\Rightarrow Régime Laminaire

• Calcul de $Nu(x)$ l'expression de Nu local ($c-\bar{a}$ et a 1 pour l'instant donnée) est donnée par l'expression suivante: $Nu(x) = \frac{h(x) \cdot x}{\lambda} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$

$Nu(x) = 44,74 = \frac{h(x) \cdot x}{\lambda}$ d'où: $h(x) = \frac{44,74 \times 0,02749}{0,2} = 6,15 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$

• calcul de \bar{h} ($\bar{h} = 2h(x=20)$) en $x=20\text{ cm} \Rightarrow \bar{h} = 2 \times 6,15 = 12,30 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$

d'où $\phi = \bar{h} S (T_p - T_\infty) = 12,30 \times (0,2 \times 1) \times (60 - 27) = 81,18 \text{ W}$ par unité de largeur.

en $x=40\text{ cm} \Rightarrow Re_{x=40\text{ cm}} = \frac{2 \times 0,4}{17,36 \times 10^{-6}} = 4,6083 \cdot 10^4 < 5 \cdot 10^5$ Rég Laminaire

R que \Rightarrow On peut calcul directement \bar{h} en utilisant $Nu = \frac{\bar{h} L}{\lambda} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$

où $Re_L = Re_{x=40\text{ cm}}: Nu = 126,557 = \frac{\bar{h} L}{\lambda} \Rightarrow \bar{h} = \frac{126,557 \times 0,02749}{0,4}$

$\Rightarrow \bar{h} = 8,699 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$

et donc $\phi = \bar{h} \times S \times (T_p - T_\infty) = 8,699 \times 0,2 \times (60 - 27) = 114,82 \text{ W}$

Ex03 Le profil de T à l'intérieur de la c.l. thermique d'un écoulement d'air ($U_\infty, T_\infty, \nu_\infty$) sur une plaque plane isotherme T_p est donné par.

$\theta(x,y) = \frac{T(x,y) - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x,y)} - \frac{1}{2} \left[\frac{y}{\delta_T(x,y)} \right]^3$ où $\delta_T(x) = \frac{5x}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}$

1) Déterminer $h(x)$ et $Nu(x)$

2) " h moyen = \bar{h}

3) On donne $U_\infty = 1,5 \text{ m/s}, T_\infty = 400 \text{ K}, L = 2 \text{ m (longueur)}, l = 0,5 \text{ (largeur)}, T_p = 300 \text{ K}$

a) Calculer \bar{h}

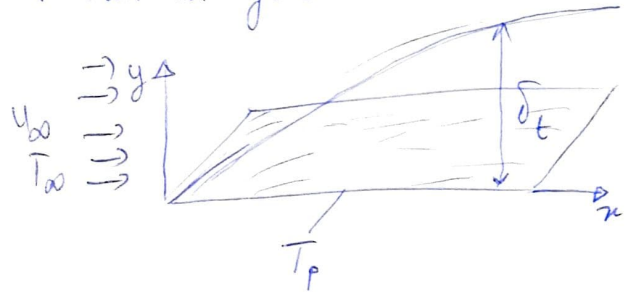
b) Calculer le flux de chaleur échangé entre la paroi et le fluide
on donne pour l'air à $T_p = 350\text{ K}$ $v_\infty = 0,21 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, $\lambda = 0,03 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ et $Pr = 607$

Solution:

$h(x)$ entre la paroi et l'écoulement d'air en $y=0$

est donné par l'expression

$$h(x) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T(x)}$$



\Rightarrow avec $\delta_T(x) = \frac{5x}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}$, on aura:

$$h(x) = \frac{3}{2} \lambda \frac{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{5x} = 0,3 \frac{\lambda}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, \text{ Comme } Nu(x) \text{ est défini comme}$$

$$\text{soit } Nu(x) = \frac{h(x)x}{\lambda} \Rightarrow Nu(x) = 0,3 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$h_m = \bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = 2 \left[h(x) \right]_{x=L} = 0,6 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \cdot \frac{\lambda}{L}$$

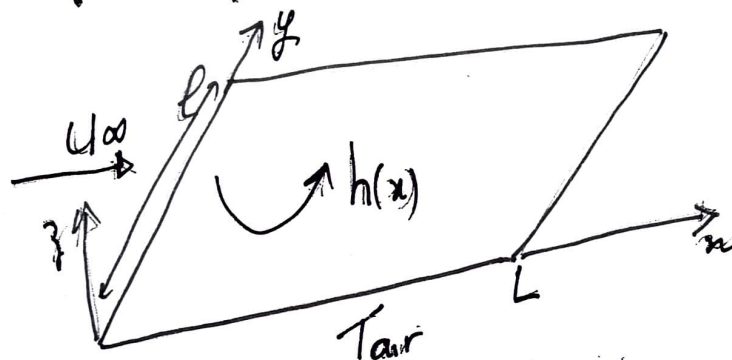
$$AN: Re_L = \frac{v_\infty \cdot L}{\nu} = 1,42857 \cdot 10^5$$

$$\text{d'où } h_m = \bar{h} = 3,328 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$$

$$\begin{aligned} \phi(\text{entre } x=0 \text{ et } x=L) &= \bar{h} S (T_\infty - T_p) = 3,328 \times 2 \times 0,5 \times (400 - 300) \\ &= 332,8 \text{ W} \end{aligned}$$

Exo 4. Écoulement sur le toit d'une voiture

On s'intéresse au coefficient d'échange convectif sur le toit d'une voiture roulant à la vitesse $u = 100 \text{ km/h}$. dans la direction x . la géométrie de ce toit est assimilable à une plaque plane de dimension $L \times l$ ($L = 2 \text{ m}$, $l = 1.5 \text{ m}$) Comme représentée sur la figure ci-dessous. Les échanges convectifs sont caractérisés par le coefficient local $h(x)$, dépendant de la position d'espace x , sur la face supérieure. La température extérieure est $T_{\text{air}} = 25^\circ\text{C}$



La vitesse à laquelle se déplace la voiture provoque deux régimes d'écoulements de l'air à la surface du toit. En utilisant les corrélations appropriées, déterminer la distance critique x_{cr} pour laquelle l'écoulement est laminaire

a) Donner l'expression de $h(x)$ en régime laminaire noté $h_l(x)$. De même, donner l'expression de $h(x)$ en régime turbulent que l'on note $h_t(x)$.

b) Déterminer les coefficients d'échanges moyens \bar{h}_l et \bar{h}_t des deux zones

c) Calculer le coefficient d'échange moyen global \bar{h} ou

$$\bar{h} = \frac{(x_{cr} \bar{h}_l)}{L} + \frac{(L - x_{cr}) \bar{h}_t}{L}$$

On donne: $T_{\text{air}} = 25^\circ\text{C}$, $P_{\text{air}} = 0,70$, $\nu_{\text{air}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$, $\rho_{\text{air}} = 0,026 \text{ SI}$
 $\mu_{\text{air}} = 18,6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $c_{p,\text{air}} = 1,005 \text{ kJ kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
 $\rho_{\text{air}} = 1,165 \text{ kg/m}^3$

$$x_{cr} = 0,288m \quad (Re_{xcr} = \frac{U_{\infty} x_{cr}}{\nu} \Rightarrow x_{cr} = \frac{Re_{xcr} \nu}{U_{\infty}}, Re_{ec} = 510^5)$$

a)
$$Nu(x) = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{\frac{1}{3}} = \frac{h(x) \cdot x}{\lambda_{air}} \quad \text{pour } x_{cr} = 0,288m$$

$$\rightarrow h(x) = 0,332 Pr^{0,33} \frac{\lambda_{air}}{x} \sqrt{\frac{Ux}{\nu_{air}}} = 0,332 Pr^{0,33} \lambda_{air} \sqrt{\frac{U}{\nu_{air}}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{M}{\sqrt{x}}$$

au delà de $x = 0,288m$ on utilise

$$Nu_2(x) = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,33} \quad (car le regime est turbulent)$$

Ceci nous permet de déterminer $h_t(x)$.

$$h_t(x) = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,33} = 0,0296 Pr^{0,33} \frac{\lambda_{air}}{x} \left(\frac{Ux}{\nu_{air}}\right)^{0,8}$$

$$= \underbrace{0,0296 Pr^{0,33} \lambda_{air}}_K \left(\frac{U}{\nu_{air}}\right)^{0,8} x_{cr}^{-0,2} = K x_{cr}^{-0,2}$$

b)
$$\overline{h_e} = \frac{1}{x_{cr}} \int_0^L h_t(x) dx = \frac{2M}{\sqrt{x_{cr}}} = \frac{M}{x_{cr}} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\overline{h_t} = \frac{1}{L - x_{cr}} \int_{x_{cr}}^L h_t(x) dx = \frac{K}{L - x_{cr}} \int_{x_{cr}}^L x^{-0,2} dx$$

$$= K \frac{5(L^{\frac{4}{5}} - x_{cr}^{\frac{4}{5}})}{4(L - x_{cr})}$$

$$M = 10,38 \quad K = 68,92$$

$$\overline{h_e} = 38,68 \text{ SI} \quad \overline{h_t} = 69,03 \text{ SI}$$

c)
$$\overline{h} = \frac{0,288}{2} \overline{h_e} + \frac{2 - 0,288}{2} \overline{h_t} = 64,66 \text{ SI}$$

 (W/m²·C)

$$\Phi = hS(T_{boil} - T_a) = m_{cp}(T_{boil} - T_{air})$$

$$= 64,66 \times 2 \times 1,5 (T_{boil} - 298) =$$

1- Fundamentals of thermal-fluid sciences, Yunus A. Çengel and Robert H. Turner, 9engel Series in Engineering, Mc Graw Hill Education.

2- Transmission de chaleur (Volume 1), Albin Bölcs, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, septembre 1997.

Sites internet

1- cours: Analyse Dimensionnelle et Similitude

<https://ridha.users.lmno.cnrs.fr/pdf/HOutDynFluidM1-3.pdf>

2- Chap VI. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

http://www.danielhuilier.fr/Enseignement/Notes_Cours/AnalyseDimensionnelle/ch6_Polymtlca.pdf

3-

<https://www.sft.asso.fr/Local/sft/dir/user3775/documents/Ouvrages/livre%20Padet/PTC%2005%20-%20Chapitre%201.pdf>

4- PTC 05 - Chapitre 1

<https://www.google.com/search?q=PTC+05++Chapitre+1&oq=PTC+05++Chapitre+1&aqs=chrome..69i57j69i60.979j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>